1.1 Элементы комбинаторики

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества. При непосредственном вычислении вероятностей часто используют формулы комбинаторики.

Определение 1. Различные группы, составленные из каких-либо элементов, и отличающиеся одна от другой либо их порядком, либо элементами, называются ***соединениями***.

Различают три вида соединений:

1. *перестановки;*
2. *размещения;*
3. *сочетания.*

Определение 2. Перестановками называются такие соединения из «n» элементов, которые составлены из одних и тех же элементов и отличаются только порядком следования элементов.

Например, множество, состоящее из трех элементов $\{1, 2, 3\}$ имеет следующие перестановки: $(1, 2, 3)$, (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 2, 1), (3, 1, 2).

Число различных перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле:

$$P_n = n!, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n \qquad (1)$$

Пример 1. Пять запечатанных пакетов с предложениями цены на аренду участков для бурения скважин поступили в специальное агентство утренней почтой. Сколько существует различных способов очередности вскрытия конвертов с предложениями цены?

Решение. Пронумеруем конверты цифрами от 1 до 5. Каждому конверту можно сопоставить один из наборов, состоящих из этих пяти цифр, например, (2,5,3,4,1). Такой набор означает, что сначала выбирается второй конверт, затем пятый, третий, четвертый и первый. Всего различных конвертов, т. е. отличающихся порядком наборов пяти цифр будет $5! = 120$.

Определение 3. Размещениями называются соединения из «n» элементов по «m» в каждом, отличающиеся одно от другого как самими элементами, так и их порядком. Размещения могут отличаться друг от друга, как элементами, так и порядком.

Например, различными размещениями множества из трех элементов $\{1, 2, 3\}$ по два будут наборы $(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)$.

Число размещений из n элементов по m определяется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (2)$$

Пример 2. Фирма нуждается в организации 4 новых складов. Ее сотрудники подобрали 8 подходящих одинаково удобных помещений. Сколько существует способов отбора 4 помещений из 8 в заданном порядке?

Решение. Пронумеруем удобные помещения цифрами от $1, 2, ..., 8$. Составить способы отбора помещений можно следующим образом. Сначала выберем помещения, например, $(2, 4, 5, 7)$, а затем порядок их выбора. Таким образом, нужно составить различные наборы четырех чисел из восьми, которые отличаются друг от друга не только элементами, но и порядком. Таких наборов $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$.

Определение 4. *Сочетаниями* называются такие соединения, которые взяты из «n» элементов по «m» в каждом и отличаются друг от друга хотя бы одним элементом (порядок следования элементов не учитывается).

Сочетания отличаются друг от друга только элементами.

Например, для множества $\{1, 2, 3\}$ сочетаниями по 2 элемента являются $(1, 2), (1, 3), (2, 3)$.

Число сочетаний из n элементов по m определяется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (3)$$

Пример 3. На 9 вакантных мест по определенной специальности претендуют 15 безработных, состоящих на учете в службе занятости. Сколько возможных комбинаций выбора 9 из 15 безработных?

Решение. Комбинации выбора образуют сочетания из 15 по 9, поскольку порядок выбора среди 15 безработных нам безразличен, т.к. безработные по одной специальности. Следовательно, число возможных комбинаций будет равно $C_{15}^9 = \frac{15!}{9! \cdot 6!} = 5005$.

Размещения с повторениями

Пусть имеется n непересекающихся множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$, каждое из которых содержит не менее чем m элементов. Из элементов множества A, то есть элементов, входящих в различные его подмножества A_i, можно составлять различные упорядоченные множества, содержащие по m элементов в каждом.

Такие упорядоченные множества принято называть *размещениями с повторениями из элементов n сортов по m элементов, или, более коротко, просто размещениями с повторениями из n элементов по m.*

Число различных возможных размещений с повторениями из n элементов по m элементов определяется по формуле:

$$\tilde{A}_n^m = n^m \qquad (4)$$

Пример 4. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены различные призы.

Решение. Каждый из вариантов распределения призов представляет собой комбинацию 5 фильмов из 10, отличающуюся от других комбинаций как составом фильмов, так и их порядком по номинациям (или и тем и другим). Причем одни и те же фильмы могут повторяться несколько раз (любой фильм может получить призы как по одной, так и по нескольким (включая все пять) номинациям), т.е. представляет размещение с повторениями из 10 элементов по 5. По формуле имеем:

$$\tilde{A}_{10}^{5} = 10^{5} = 100000.$$

Перестановки с повторениями

Определение 4. Перестановкой с повторениями *из n элементов называется любое упорядочение конечного множества, состоящего из n элементов, среди которых имеются совпадающие.*

Отсюда следует, что число различных перестановок с повторениями в нашем случае равно:

$$\tilde{P}_n(\alpha;\beta;\gamma;...;\lambda) = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,...\,\lambda!}, \text{ где } n = \alpha + \beta + \gamma + ... + \lambda \quad (5)$$

Пример 5. Сколько существует семизначных чисел, состоящих из цифр 4, 5, 6, в которых цифра 4 повторяется 3 раза, а цифры 5 и 6 – по 2 раза?

Решение. Каждое семизначное число отличается от другого порядком следования цифр (причем $n_1=3$, $n_2=2$, $n_3=2$, а их сумма равна 7), т.е. является перестановкой с повторениями из 7 элементов. Тогда:

$$\tilde{P}_n(3;2;2) = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210\,.$$

Сочетания с повторениями

Определение 5. Сочетанием с повторениями *из n элементов по m элементов называется всякое множество, содержащее m элементов, каждый из которых является элементом одного из данных n сортов.*

Число различных возможных сочетаний с повторениями из nэлементов по m элементов вычисляется по формуле:

$$\tilde{C}_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} \quad (6)$$

Пример 6. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены одинаковые призы.

Решение. Если по каждой номинации установлены одинаковые призы, то порядок следования фильмов в комбинации 5 призов значения не имеет, и число вариантов распределения призов представляет собой число сочетаний с повторениями из 10 элементов по 5. Тогда:

$$\tilde{C}_{10}^{5} = \frac{(5+10-1)!}{5!(10-1)!} = 2002\,.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколькими способами можно взять 7 костей из полного набора домино (28 штук)?
2. В отделении 12 солдат. Каким числом способов можно составить наряд из двух человек, если один из них должен быть назначен старшим?
3. Какое число различных парных нарядов можно назначить из 12 солдат отделения, если не требуется назначать старшего по наряду?
4. Правление коммерческого банка выбирает из 10 кандидатов 3-х человек на различные должности (все 10 кандидатов имеют равные шансы). Сколько всего групп по 3 человека можно составить из 10 кандидатов?
5. Правление коммерческого банка выбирает из 10 кандидатов 3-х человек на одинаковые должности (все 10 кандидатов имеют разные шансы). Сколько всевозможных групп по 3 человека можно составить из 10 кандидатов?
6. Менеджер ежедневно просматривает 6 изданий экономического содержания. Если порядок просмотра изданий случаен, то, сколько существует способов его осуществления?
7. Директор корпорации рассматривает заявления о приеме на работу 10 выпускников университета. Сколькими способами директор может заполнить эти вакансии?
8. Имеется 6 путевок в санаторий и 7 путевок в дом отдыха. Сколькими способами можно выдать некоторому учреждению 3 путевки в санаторий и 4 путевки в дом отдыха?
9. На железнодорожной станции имеется пять запасных путей. Сколькими способами можно расставить шесть поездов?
10. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами преподаватель может поставить им оценки, если известно, что все студенты сдали экзамен.
11. Сколькими способами можно выбрать четырехзначное число, все числа которого различны?
12. Сколькими способами можно распределить 28 костей домино между 4 игроками так, чтобы каждый получил 7 костей?
13. Сколько существует семизначных чисел, состоящих из цифр 2, 3, 4, в которых цифра 2 повторяется 4 раза, цифра 3 – 3 раза, цифра 4 – 5 раз?